Introdução à Bioestatística

Marcelo Goulart Correia

Instituto Nacional de Cardiologia

March 11, 2015

1. Introdução à probabilidade
2. Pré-requisitos
3. Testes diagnósticos

- Os primeiros estudos surgiram no século XVII
- Teve origem nos jogos de azar
- Grandes nomes da matemática desenvolveram teorias de probabilidades:
    - Pascal
    - Fermat
    - Huygens
    - Newton
    - Bernoulli
    - Laplace
    - Bayes
    - Kolmogorov

Divina comédia

O primeiro trabalho com noções de probabilidade é de 1477, é um comentário feito à Dante sobre probabilidades associadas aos resultados decorrentes de 3 dados.

Dante Alighieri

- Fornece regras para o estudo das experiências aleatórias, constituindo a base para a Estatística Inferêncial

- Um experimento é aleatório quando:
  - Permite-se repetição nas mesmas condições
  - Não é possível predizer o resultado
  - Os resultados obtidos (e) pertence a um conjunto conhecido previamente de resultados possíveis

- "...conjunto conhecido previamente de resultados possíveis" –> Espaço amostral (E)
- Os elementos de E –> eventos elementares

$$\boxed{e_1, e_2 \in E \Rightarrow e_1, e_2 \text{ são eventos elementares}} \tag{1}$$

- Subconujuntos de E –> Eventos aleatórios

$$\boxed{A, B \subset E \Rightarrow A, B \text{ são eventos aleatórios}} \tag{2}$$

- Pode-se aplicar operações algébricas nesses conjuntos:
- União –> Conjunto com todos os eventos elementares (e) que pertencem a A ou B

$$\boxed{A \cup B = \{e \in E : e \in A \text{ ou } e \in B\}} \tag{3}$$

- Intersecção –> Conjunto com todos os eventos elementares (e) que pertencem a A e B ao mesmo tempo

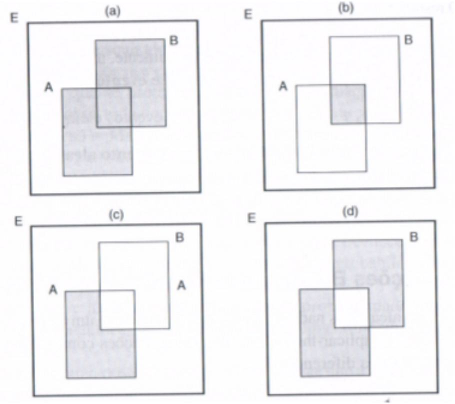
$$\boxed{A \cap B = \{e \in E : e \in A \text{ e } e \in B\}} \tag{4}$$

- Diferença –> Conjunto com todos os eventos elementares (e) que pertencem a A e não pertencem a B

$$\boxed{A \backslash B \equiv A - B = \{e \in E : e \in A \text{ e } e \notin B\}} \qquad (5)$$

- Diferença simétrica –> Conjunto com os eventos elementares (e) que pertencem a A e B não pertencem, e também os eventos elementares (e) que pertencem a B e não pertencem a A

$$\boxed{A \triangle B = (A \backslash B) \cap (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)} \qquad (6)$$


(a)
E
A
B
(b)
E
A
B
(c)
E
A
B
A
(d)
E
B

- Exemplo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$:
    - União: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
    - Interseção: $A \cap B = \{3\}$
    - Diferença: $A - B = \{1, 2\}$
    - Dif. simétrica: $A - B = \{1, 2, 4, 5\}$

- Probabilidade de Laplace
  - Se um experimento com um número finito de resultados
  - Sem indícios de vícios
  - Utiliza-se a regra de Laplace

$$\boxed{P[A] = \frac{\text{Número de casos favoráveis de A}}{\text{Número de casos possíveis}}} \tag{7}$$

- Axiomas de Probabilidade:
  1. Uma probabilidade só poderá ter valores positivos entre 0 e 1
  2. A probabilidade de um evento certo é 1
  3. Dado um experimento, a união de eventos distintos é o somatório de suas probabilidades

- Exemplo:
  - Probabilidade de sair 1 num dado de 6 lados $= 1/6$
  - Probabilidade de sair cara numa moeda $= 1/2$
  - Probabilidade de sair um número par no dado $= 1/2$
  - ...

- Exercício

- Teoremas fundamentais da Probabilidade
  - Probabilidade da união de dois eventos (eventos isolados)

$$\boxed{P[A \cup B] = P[A] + P[B]} \tag{8}$$

  - Probabilidade da união de dois eventos (eventos simultâneos)

$$\boxed{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]} \tag{9}$$

  - Probabilidade da intersecção de dois eventos (eventos independentes)

$$\boxed{P[A \cap B] = P[A] * P[B]} \tag{10}$$

- Teoremas fundamentais da Probabilidade
  - Probabilidade da intersecção de dois eventos (eventos dependentes)

$$\boxed{P[A \cap B] = \begin{cases} P[A] * P[B_{|A}] \\ P[B] * P[A_{|B}] \end{cases}} \tag{11}$$

  - Probabilidade de um evento complementar:

$$\boxed{P[\bar{A}] = 1 - P[A]} \tag{12}$$

- Probabilidade condicional
  - Dados dois eventos aleatórios (A e B) com probabilidade maior que zero, pode-se calcular a probabilidade condicional desses dois eventos (ou seja, probabilidade de A dado B)

$$\boxed{P[A_{|B}] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}} \tag{13}$$

- Exemplo - Teorema da soma:
  - Eventos isolados:
    - Uma urna tem duas bolas brancas, uma azul e uma vermelha. Qual a probabilidade de sair uma bola colorida?
    - $1/4 + 1/4 = 1/2$
  - Eventos simultâneos:
    - Num baralho, qual a probabilidade de sair uma carta de espadas ou um ás?
    - $13/52 + 4/52 - 1/52 = 16/52$

- Exemplo - Teorema do Produto:
  - Eventos independentes:
    - Probabilidade de sair cara em dois lançamentos = 1/2 * 1/2 = 1/4
    - Probabilidade de sair 2 num dado e cara numa moeda = 1/2 * 1/6 = 1/12
  - Eventos dependentes:
    - Uma urna tem duas bolas brancas e uma vermelha, retiram-se duas bolas. Qual a probabilidade das suas serem brancas?
    - 2/3 * 1/2 = 2/6 = 1/3

- Exemplo - Probabilidade condicional:
  - Qual a probabilidade do número par sorteado seja o número 4?
    - $A = \{4\} \rightarrow P[A] = 1/6$
    - $B = \{2, 4, 6\} \rightarrow P[B] = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$
    - $A \cap B = \{4\} \rightarrow P[A \cap B] = 1/6$
  - $P[A_{|B}] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$

- Exercício

- Teorema de Bayes
  - Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$ –> Sistema excludente de eventos
  - $B \subset E$ –> Dado evento conhecido
  - $P[B_{|Aj}]$, i = 1, ..., n –> Probabilidades (ou verossimilhanças)

$$\boxed{P[A_{j|B}] = \frac{P[B_{|Aj}] * P[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[B_{|Ai}] * P[A_i]}} \tag{14}$$

- $\forall_J = 1, \ldots, n$

- Exemplo
  - São dispostas três urnas com números diferentes de bolas brancas e vermelhas:
    - Primeira Urna (U_1): três bolas brancas e duas vermelhas
    - Segunda Urna (U_2): quatro bolas brancas e duas vermelhas
    - Terceira Urna (U_3): três vermelhas
  - O experimento aleatório consiste de escolher uma urna e retirar uma bola ao acaso
  - Se o resultado do sorteio for bola branca, qual a probabilidade dela ser da primeira urna?

U1	U2	U3
3 B	4 B	0 B
2 V	2 V	3 V

- As urnas tornam o experimento com eventos excludentes. Por que?
  - A bola sorteada necessariamente vem de apenas UMA urna!

$$P[U_1] = 1/3 \; // \; P[B_{|U1}] = 3/5$$
$$P[U_2] = 1/3 \; // \; P[B_{|U2}] = 4/6$$
$$P[U_3] = 1/3 \; // \; P[B_{|U3}] = 0/3$$

U1	U2	U3
3 B	4 B	0 B
2 V	2 V	3 V

$$P[U_1] = 1/3 \;//\; P[B_{|U1}] = 3/5$$
$$P[U_2] = 1/3 \;//\; P[B_{|U2}] = 4/6$$
$$P[U_3] = 1/3 \;//\; P[B_{|U3}] = 0/3$$

$$P[U_{1|B}] = \frac{P[B_{|U1}]*P[U_1]}{P[B_{|U1}]*P[U_1]+P[B_{|U2}]*P[U_2]+P[B_{|U3}]*P[U_3]}$$

$$P[U_{1|B}] = \frac{3/5*1/3}{3/5*1/3+4/6*1/3+0/3*1/3} = 9/19$$

- Exercício

- Pontos importantes sobre o Teorema de Bayes
  - Probabilidade a priori –> Crença inicial sobre uma dada probabilidade
  - Probabilidade a posteriori –> Probabilidade de um fato ocorrer dada a crença inicial

- Inicialmente suspeita-se de que um determinado paciente tenha uma enfermidade –> Incidência da enfermidade na população –> P[E]
- O paciente é submetido a um dado teste onde pode se ter dois resultados
  - Positivo (T^+)
  - Negativo (T^-)
- Previamente devem ser estimadas:
  - Sensibilidade –> Probabilidade de um teste positivo numa pessoa enferma ($P[T^+_{|E}]$)
  - Especificidade –> Probabilidade de um teste negativo numa pessoa saudável($P[T^-_{|\bar{E}}]$)

- Na prática, as medidas que mais interessam são:
  - Índice preditivo positivo –> Probabilidade de um paciente estar enfermo com teste positivo ($P[E_{|T^+}]$)
  - Índice preditivo negativo –> Probabilidade de um paciente estar saudável com teste negativo ($P[\bar{E}_{|T^-}]$)

- Exemplo
  - Foram selecionadas 200 pessoas (100 com boa saúde e 100 enfermas) para realizar um teste diagnóstico

	E	NE	Total
T+	89	3	92
T-	11	97	108
Total	100	100	200

- A probabilidade de alguém estar realmente enfermo com teste positivo é:

$$P[E_{|T^+}] = \frac{P[T^+_{|E}]*P[E]}{P[T^+_{|E}]*P[E]+P[T^+_{|\bar{E}}]*P[\bar{E}]}$$

- A probabilidade de alguém estar realmente saudável com teste negativo é:

$$P[\bar{E}_{|T^-}] = \frac{P[T^-_{|\bar{E}}]*P[\bar{E}]}{P[T^-_{|\bar{E}}]*P[\bar{E}]+P[T^-_{|E}]*P[E]}$$

- Exercício